TAMPEREEN YLIOPISTO
Pro gradu -tutkielma

Marianne Timgren

Materiaalia lukion talousmatematiikan jatkokurssille

Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka
Syyskuu 2016

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
TIMGREN, MARIANNE: Materiaalia lukion talousmatematiikan jatkokurssille
Pro gradu -tutkielma, 48 s.
Matematiikka
Syyskuu 2016

Tiivistelmä

Tämän pro gradu -tutkielman aiheena on oppimateriaali lukion soveltavalle koulukohtaiselle talousmatematiikan jatkokurssille. Koulukohtaisuuden takia kurssin tavoitteita ja sisältöä ei ole mainittuna opetussuunnitelmassa. Kurssi kuitenkin sopii sisällöltään uuteen opetussuunnitelmaan, sillä se ylittää oppiainerajoja ja on laaja-alainen. Kurssi on suunnattu pääasiassa pitkän matematiikan opiskelijoille, muttei ole sisällöltään liian vaikea lyhyen matematiikan opiskelijoille.

Kurssin matemaattiseksi sisällöksi on valittu matriisit ja niiden ominaisuudet, joita sovelletaan taloustieteen laskuissa. Materiaalissa esitetään ensin matemaattinen osuus esimerkkeineen ja tehtävineen, minkä jälkeen pureudutaan kolmeen markkinatalouden malliin, jotka ovat kysyntä-tarjonta -malli, kansantulomalli sekä panostuotos -malli. Kurssimateriaalin harjoitustehtävät ovat perustehtäviä, jolloin lyhyen matematiikan opiskelijoiden on mieluista opiskella kurssia. Tehtävien laadun takia kurssiin on helppoa yhdistää teknologiaa oppimateriaalin rinnalle. Materiaalissa on havainnollistuksia muun muassa koordinaatistossa, jotta opittavaa asiaa voidaan ymmärtää paremmin. Samoin jokaisesta asiasta on esitetty esimerkki harjoitustehtävien tekemisen helpottamiseksi.

Oppimateriaalin alussa on ehdotus ajankäytöstä sekä tavasta käyttää oppimateriaalia. Kurssi sopii erittäin hyvin myös projektiluontoiseksi kurssiksi, jolloin kurssia ei tarvitse suorittaa loppukokeella. Materiaali tutustuttaa opiskelijat myös matemaattiseen esitykseen, joka tuo omalla tavallaan haastavuutta kurssiin.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän pro gradu -tutkielman tarkoituksena on toimia oppimateriaalina koulukohtaisella talousmatematiikan kurssilla. Lukijalle oletetaan tunnetuksi reaalilukujen laskutoimitukset. Vektorien peruslaskutoimitukset ja ominaisuudet avaruudessa $\mathbb{R}^n$ olisi hyvä hallita ennen oppimateriaaliin tutustumista, muttei se ole välttämätöntä, sillä kurssin pohjustuksena käydään läpi tarvittavat asiat vektorialgebrasta. Oppimateriaalin omaksuttuaan lukija ymmärtää vektorien ja matriisien yhteyden toisiinsa, osaa laskea matriiseilla peruslaskutoimituksia ja määrittää matriisien determinantit, osaa ratkaista matriiseilla lineaarisia yhtälöryhmiä ja käyttää sitä taitoa hyväksi talousmatematiikan laskujen ratkaisemiseen.

Materiaali jakautuu kahteen osaan: matriiseihin ja markkinamalleihin. Paino on ensimmäisessä osassa, jossa käydään läpi matriisien peruslaskuoperaatiot, erityismatriiseja, determinantti sekä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisiyhtälön avulla. Toisessa osassa käytetään ensimmäisessä osassa opittua markkinatalouden mallien ongelmien ratkaisemisessa. Oppimateriaalissa tutustutaan kysyntätarjonta -malliin, kansantulomalliin sekä Leontiefin panos-tuotos -malliin.

Kurssi ja oppimateriaali on tarkoitettu pitkän matematiikan opiskelijoille, mutta myös lyhyen matematiikan opiskelijat voivat valita kurssin. Koska tutkielma on oppimateriaali, ulkonäkö poikkeaa perinteisestä tutkielmamallista, jotta se olisi luettavampaa. Sisällöltä materiaali poikkeaa myös, sillä lukion oppimateriaaleissa ei yleensä esinny matemaattista jäsennystapaa: määritelmä, lause, todistus ja esimerkki. Tapa voi olla liian vaikea lukiolaisille, joten sitä on käytetty vain parissa kohdassa.

Tutkielman päälähteinä on käytetty Chiangin ja Wainwrightin Fundamental Methods of Mathematical Economics -kirjaa sekä Antonin ja Rorresin Elementary Linear Algebra -kirjaa. Muitakin matematiikan ja talousmatematiikan lähteitä on käytetty monipuolisuuden takaamiseksi. Oppimateriaalin rungon muodostamisessa on seurattu Chiangin ja Wainwrightin kirjaa, jotta oppimateriaali esittää markkinatalouden mallien ongelmien ratkaisemiseen tarvittavat pohjatiedot ja -taidot.

2 Kurssin tavoite

Tämä kurssi on tarkoitettu koulukohtaiseksi soveltavaksi kurssiksi, joten lukion opetussuunnitelmissa ei ole mainintaa kurssista, sen tavoitteista eikä sisällöistä. Kurssin tavoitteena kuitenkin on, että opiskelija ymmärtää matriisin käsitteen ja perehtyy matriisilaskennan perusteisiin. Kurssin aikana opiskelija oppii tunnistamaan erilaisia matriiseja ja osaa käyttää matriisilaskentaa soveltavien talousmatematiikan ongelmien ratkaisemisessa. Kurssin keskeisiä sisältöjä ovat matriisien perusominaisuudet, matriisien yhteen-, vähennys- ja kertolasku, matriisien kertominen skaalarilla, matriisin determinantti, Cramerin sääntö, matriisiyhtälöiden ratkaiseminen, kysyntä-tarjonta -malli, kansantulomalli sekä panos-tuotos -malli.

Edellä mainittujen ohjaamana tutustutaan matriisilaskennan perusteisiin sekä markkinatalouden malleihin. Ensin kertaamme vektorit, jotka ovat monessa mielessä matriisien erikoistapauksia. Sen jälkeen pureudutaan matriiseihin ja niillä laskemiseen sekä esitellään muutamia erikoismatriiseja. Kun matriisit ja Cramerin sääntö ovat hallussa, sovelletaan matriisilaskentaa eri mallien laskuongelmien ratkaisuissa. Näin opiskelija yhdistää matriiisit käytäntöön.

2.1 Ajankäyttöehdotus

Tämän kurssin tärkein tavoite on oppia perusmatriisilaskenta ja sen soveltaminen Cramerin säännön avulla talousmatematiikassa. Vähemmälle huomiolle jää kuriositeettina transpoosi ja käänteismatriisi, mutta ne käydään läpi, jotta Cramerin sääntö voidaan esittää pitävänä. Koska uudessa opetussuunnitelmassa pyritään saamaan laaja-alainen oppiainerajoja ylittävä lukiotutkinto, niin tämä kurssi sopii uuteen opetussuunnitelmaan. Uudistuksen myötä kurssi voidaan suorittaa harjoituksilla ja markkinamalleihin liittyvällä projektityöllä. Lisäksi kurssiin on hyvä liittää teknologia mukaan. Tehtävien laskemisen apuna voi käyttää muun muassa MATLAB:ia, jolloin opiskelija tutustuu myös erittäin kätevään apuohjelmaan.

Ajankäyttöehdotus	
Aihe	**Tuntimäärä (*45 min)**
Vektorit	2
Matriisi ja matriisien summa	3
Matriisien kertolasku	5
Erityismatriisit	2
Matriisien erotus ja laskulakeja	3
Transpoosi ja käänteismatriisi	2
Lineaaristen yhtälöryhmien ratkaiseminen	5
Kysyntä-tarjonta -malli	3
Kansantulomalli	3
Panos-tuotos -malli	4
Projektityö	6
Yhteensä	38

Taulukko 2.1: Ajankäyttöehdotus

Koko kurssin tuntimäärä on 38 oppituntia, kun oppitunnin mitta on 45 min. Taulukossa 2.1 on esitetty ajankäyttöehdotus kurssin suorittamiselle. Ehdotuksen pohjalla on idea asioiden rauhallisesta läpikäynnistä ja aiheeseen liittyvästä isommasta projektista. Kurssin kokonaisarvosanaan vaikuttaisi tuntiaktiivisuus sekä projektityö, joka voisi olla esitys esimerkiksi yrityksestä ja toimialasta. Esityksessä olisi mukana joitain laskelmia liittyen kurssilla esitettyihin malleihin. Kurssin eräänä tavoitteena on tutustuttaa opiskelijat käyttämään tietokonesovelluksia, joilla voidaan matriiseja laskea. Sovellusten esittely on otettu huomioon ajankäyttöehdotuksessa.

2.2 Materiaalista

Tämä materiaali on tehty Tampereen yliopiston pro gradu -tutkielmana, joten oppimateriaalin ulkoasu ei ole loppuun asti hiottu. Samaten tehtävien määrä on vähäinen, mutta se esittelee aiheeseen liittyviä tyyppitehtäviä. Tämä antaa materiaalin käyttäjälle mahdollisuuden tehdä tarvittavan määrän lisätehtäviä. Uusikylä ja Atjonen määrittelevät oppimateriaalin seuraavasti: "Oppimateriaalilla tarkoitetaan johonkin aineeseen, materiaan kytkettyä oppiainesta, jonka tulee välittyä oppilaille ja saada heissä aikaan sellaisia elämyksiä ja oppimiskokemuksia, joista syntyy tavoitteiden mukaisia, pysyviä tietojen ja taitojen muutoksia ja affektiivisia vaikutuksia."[12, s. 164]. Tämän oppimateriaalin tarkoituksena on tutustuttaa opiskelijat matriiseihin. Materiaalissa on esitetty paljon esimerkkejä, jotta opiskelijat saavat konkreettisen kuvan matriiseista ja jotta opiskelijoilla tapahtuu kognitiivisia muutoksia.

Kuten aiemmin mainittiin, materiaali on pro gradu -tutkielma, joten se ei ole täydellinen oppimateriaali eikä sitä voi yksinään käyttää opetuksessa. Sitä voidaan käyttää hyväksi, mutta opettajan on täydennettävä opetusta eri opetusmuodoilla ja työtavoilla sekä omilla esimerkeillään ja omilla tehtävillään. Kuten Uusikylä ja Atjonen kertovat, oppimateriaalin käytön hyvyys ja huonous on sidoksissa näihin asioihin [12, s.164]. Materiaali on kuitenkin pyritty tekemään lukioikäistä varten, vaikka onkin yliopistotutkielma. Kieltä ja käsitteitä on yritetty tehdä lukiolle sopivaksi. Tämän takia asioita on pyritty pitämään ei-abstraktilla tasolla. Esimerkkinä voidaan esittää se, että materiaalissa vektoreita käsitellään avaruuksissa $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ja $\mathbb{R}^3$ ja että determinantteja lasketaan 2×2- ja 3×3-matriiseille. Kuitenkin materiaalissa on paljon matemaattista tieteellistä esitystä: muun muassa määritelmät ja todistukset. Tämä tuo jonkin verran haastetta lukioikäiselle matematiikan opiskelijalle. Tällä tavoin voidaan välttää Uusikylän ja Atjosen esittämä ongelma, jossa oppikirjan kieli ja käsitteet olisivat liian helppoja tai vaikeita [12, s.169].

Oppimateriaali aloitettiin MAA4-kurssilta (lukion opetussuunnitelma 2015) tutulla asialla, vektorilla, sillä Bransford toteaa, että ihmiset rakentavat uutta tietämystä ja ymmärrystä jo tietämänsä ja uskomansa pohjalle [2, s.23]. Vektorit voidaan yhdistää matriiseihin erikoistapauksena, jolloin opiskelijoilla on jonkinlainen esikäsitys matriiseista. Oppimateriaalin sisältö on tarkoitus ehtiä käydä läpi rauhallisella tahdilla, jotta voidaan varmistaa opiskelijoiden oikeanlainen yhdistelevä oppiminen, sillä Bransford toteaa, että liian nopea käsittely johtaa irrallisen tiedon oppimiseen tai esitettyjen tiedonjärjestelmien epämääräiseen käsittelyyn [2, s.71-72]. Oppimateriaalissa matriisit yhdistetään talousmatematiikkaan, koska Bransfordin mielestä opiskelijat ovat motivoituneempia, kun opiskelija havaitsee opittavan asian olevan hyödyllinen ja asian käytettävyyden johonkin, jolla on vaikutusta toisiin [2, s.75]. Matriisit olisi voinut yhdistää esimerkiksi signaalinkäsittelyyn, mutta tällöin sovelluskohde olisi ollut lukioikäiselle liian monimutkainen vaikkakin erittäin kiinnostava. Markkinamallit ovat siinäkin suhteessa hyvä valinta, että se antaa hyvät pohjat kauppakorkeakouluun suuntaavalle ja yhdistää yhteiskuntaopin matematiikkaan.

3 Vektorien ja matriisien algebraa

3.1 Vektorien operaatiot

Luvussa 3 esitämme vektorien summan ja skalaarilla kertomisen sekä uuden käsitteen, matriisin, laskutoimituksia ja ominaisuuksia. Tässä pykälässä keskitytään vektoreihin ja esitellään lyhyesti vektorien laskutoimituksia. Vektorit kuvaavat suureita, joilla on suunta ja suuruus. Vektorin käsitteen ymmärtämiseksi voidaan ajatella vektorin alkavan origosta ja päätyvän koordinaattipisteeseen. Vektoria merkitään kyseisen kordinaattipisteen avulla. Esimerkiksi vektorin $\bar{a}$ päätepiste on (x, y), jolloin merkitään $\bar{a} = (x, y)$. Koordinaattien eri osia sanotaan komponenteiksi. Esimerkissä x on yksi komponentti ja y toinen komponentti. Nyt kun komponentteja on kaksi, käsitellään kaksiulotteista avaruutta, jota merkitään notaatiolla $\mathbb{R}^2$. Tällöin vektori kuuluu tähän avaruuteen ja merkitään notaatiolla $\bar{a} \in \mathbb{R}^2$. Vastaavasti kolmiulotteisessa koordinaatistossa komponentteja on kolme ja avaruuden vektoreita merkitään $\bar{a} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Yleisessä tapauksessa, kun komponentteja on n kappaletta, avaruutta merkitään notaatiolla $\mathbb{R}^n$.

Määritelmä 1.

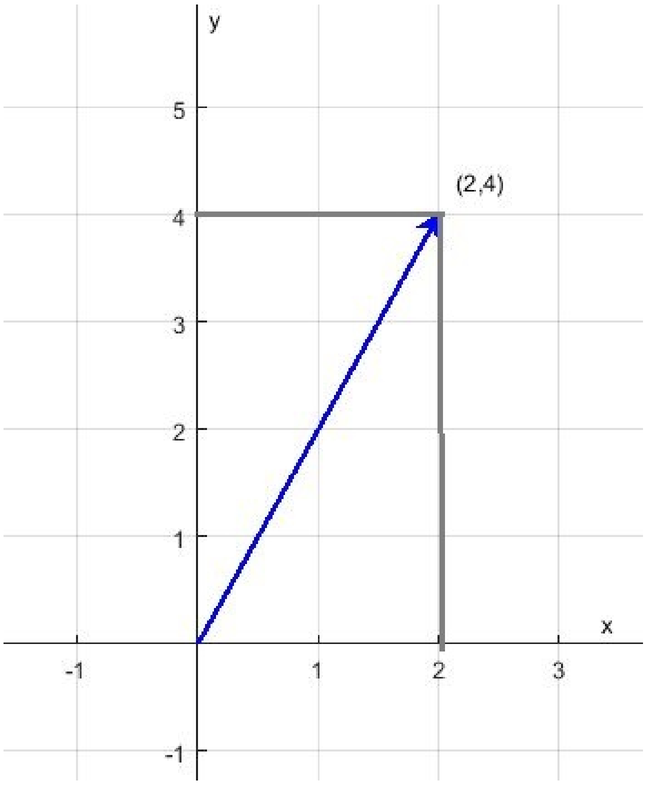
Olkoot $\bar{a} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ja $\bar{b} = (b_1, b_2, ..., b_n)$ vektoreita niin, että $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$.Vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ *yhteenlasku* suoritetaan laskemalla vektorin komponentit yhteen

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1, a_2, ..., a_n) + (b_1, b_2, ..., b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n).$$

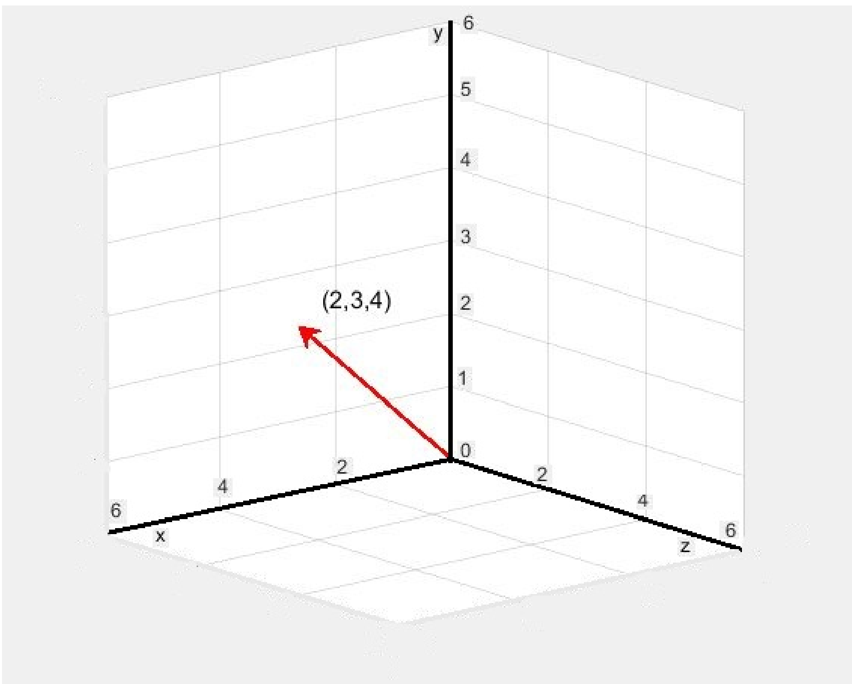
Olkoon $c \in \mathbb{R}$ skalaari. Vektorin *skalaarilla kertominen* suoritetaan myöskin komponenteittain

$$c\bar{a} = c(a_1, a_2, ..., a_n) = (ca_1, ca_2, ..., ca_n).$$

Lukiossa keskitytään pääasiassa 2-ulotteiseen avaruuteen eli avaruuteen $\mathbb{R}^2$, jolloin vektoreilla on kaksi koordinaattia. Kuvassa 3.1 on esimerkki avaruuden $\mathbb{R}^2$ vektorista $(2, 4)$. Vektorin alkupiste on origossa ja loppupiste pisteessä $(2, 4)$, missä x-koordinaatti on 2 ja y-koordinaatti on 4. Kuvassa 3.2 puolestaan on vektori avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Tässäkin vektorin alkupisteenä on sopimusten mukaan origo ja loppupisteenä $(2, 3, 4)$. Vektori voidaan asettaa alkamaan muualtakin kuin origosta, joka voidaan havaita seuraavasta esimerkistä. Tätä moniulotteisemmat avaruudet ovat niin abstrakteja, että niiden havainnollistaminen on hankalaa. Täten lukiossa niiden avaruuksien käsittely on epäolennaista.



Kuva 3.1: Vektori avaruudessa $\mathbb{R}^2$



Kuva 3.2: Vektori avaruudessa $\mathbb{R}^3$

Esimerkki 1.

Olkoot $\bar{a} = (2,5)$ ja $\bar{b} = (1,1)$ vektoreita. Lasketaan

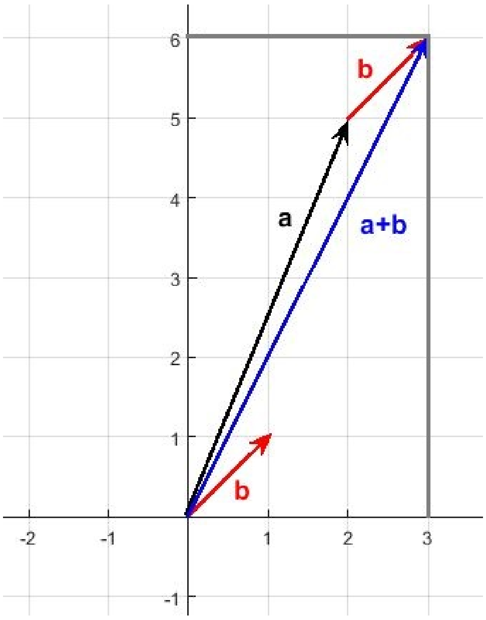
a) vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ summa

b) vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ erotus.

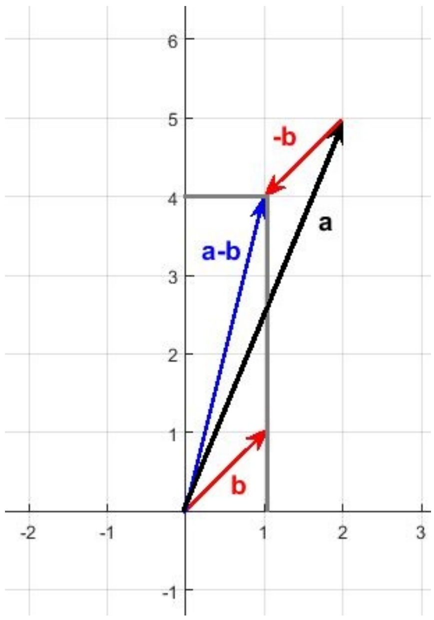
Sekä summa että erotus lasketaan komponenteittain.

a) $\bar{a} + \bar{b} = (2,5) + (1,1) = (2+1, 5+1) = (3,6)$

b) $\bar{a} - \bar{b} = (2,5) - (1,1) = (2-1, 5-1) = (1,4)$.



Kuva 3.3: Esim. 1. a) vektorien summa



Kuva 3.4: Esim. 1. b) vektorien erotus

Esimerkki 2.

Kaksiulotteisessa avaruudessa $\bar{a} = (3,9)$ ja $\bar{b} = (1,3)$ ovat vektoreita. Määritetään skalaari c niin, että $\bar{a} = c\bar{b}$.

Ehtona on, että $\bar{a} = c\bar{b}$. Esitetään ehto komponenteittain

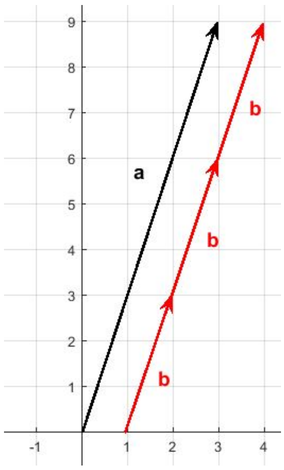
$$\begin{aligned} \bar{a} &= c\bar{b} \\ (3,9) &= c(1,3) \\ (3,9) &= (1c, 3c). \end{aligned}$$

Tällöin saadaan komponenteista kaksi yhtälöä

$$\begin{cases} 3 = 1c \\ 9 = 3c. \end{cases}$$

Molempien yhtälöiden ratkaisuksi saadaan $c = 3$.

Kuvissa on havainnollistettu edellä käytyjä esimerkkejä. Kuvista 3.3 ja 3.4 nähdään, minkälainen vektorien yhteen- ja vähennyslasku on graafisesti esitettynä koordinaatistossa. Vektorien yhteenlaskussa yhteenlaskettavat vektorit asetetaan peräkkäin siten, että edellisen vektorin päätepiste on seuraavan vektorin alkupiste. Summavektorin koordinaatit saadaan peräkkäisten vektorien päätekoordinaatista. Samalla tavalla suoritetaan vähennyslasku, mutta vähennettävän vektorin suuntaa muutetaan vastakkaiseksi. Kuvassa 3.5 on havainnollistettu esimerkkiä 2. ja sitä, miten skalaarilla kertominen vaikuttaa alkuperäiseen vektoriin. Skalaarin ollessa positiivinen vektorin suuruus muuttuu. Skalaarin ollessa negatiivinen suuruuden lisäksi vektorin suunta muuttuu vastakkaiseksi.



Kuva 3.5: Esim. 2. Skalaarilla kertominen

Vektoreille $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^2$ pätevät seuraavat laskulait, joita voidaan käyttää vektorilausekkeiden sieventämisessä [7, s. 190]. Laskulait ovat seurauksia määritelmästä 1. Jokainen seuraavista laskulaeista voidaan todistaa sen avulla, mutta esitellään vain kahdesta laista todistukset ja hyväksytään muut todistuksitta.

Olkoot vektorit $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathbb{R}^n$, missä $n = 1,2,3$, ja skalaarit r, $s \in \mathbb{R}$. Nollavektori $\bar{0}$ ja vastavektori $-\bar{u}$ ovat määriteltyjä kurssilla MAA4.

Vaihdannaisuus: $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

Liitännäisyys: $(\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w} = \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w})$

Nollavektori : $\bar{u} + \bar{0} = \bar{u}$

Vastavektori: $\bar{u} + (-\bar{u}) = \bar{0}$

1. osittelulaki: $r(\bar{u} + \bar{v}) = r\bar{u} + r\bar{v}$

2. osittelulaki: $(r + s)\bar{u} = r\bar{u} + s\bar{u}$

Skalaarilla kertomisen liitännäisyys: $r(s\bar{u}) = (rs)\bar{u}$

Skalaarilla kertomisen yksikköalkio: $1\bar{u} = \bar{u}$.

Esitetään todistukset 1. osittelulaista ja skalaarilla kertomisen liitännäisyydestä.

Todistus: 1. osittelulaki. Olkoon $r \in \mathbb{R}$ skalaari ja olkoot $\bar{u}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ vektoreita. Aloitetaan sieventäminen yhtälön vasemmalta puolelta

$$\begin{aligned}
r(\bar{u} + \bar{v}) &\overset{(1)}{=} r((u_1,u_2) + (v_1,v_2)) \\
&\overset{(2)}{=} r(u_1 + v_1,u_2 + v_2) \\
&\overset{(3)}{=} (r(u_1 + v_1),r(u_2 + v_2)) \\
&\overset{(4)}{=} (ru_1 + rv_1,ru_2 + rv_2) \\
&\overset{(5)}{=} (ru_1,ru_2) + (rv_1,rv_2) \\
&\overset{(6)}{=} r(u_1,u_2) + r(v_1,v_2) \\
&\overset{(7)}{=} r\bar{u} + r\bar{v}.
\end{aligned}$$

Käydään läpi sieventäminen vaiheittain.

(1) Muutetaan vektorit komponenttimuotoon.

(2) Lasketaan yhteen vektorit komponenteittain.

(3) Kerrotaan skalaarilla komponenteittain.

(4) Käytetään reaalilukujen laskusääntöjä summalausekkeen kertomiseen.

(5) Käytetään vektorien yhteenlaskua erottelemaan u- ja v-komponentit toisistaan.

(6) Käytetään skalaarilla kertomista, jotta saadaan skalaari koordinaattisulkeiden ulkopuolelle.

(7) Muutetaan komponenttiesitys vektoriesitykseen.

Havaitaan, että vektorien 1. osittelulaki on pätevä. □

Todistus: Skalaarilla kertomisen liitännäisyys. Olkoot r, $s \in \mathbb{R}$ skalaareja ja olkoon $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$ vektori. Sievennetään vasemmalta puolelta lähtien

$$\begin{aligned} r(s\bar{u}) &\overset{(1)}{=} r(s(u_1,u_2)) \\ &\overset{(2)}{=} r(su_1,su_2) \\ &\overset{(3)}{=} (r(su_1),r(su_2)) \\ &\overset{(4)}{=} ((rs)(u_1),(rs)(u_2)) \\ &\overset{(5)}{=} (rs)(u_1,u_2) \\ &\overset{(6)}{=} (rs)\bar{u}. \end{aligned}$$

Selvennetään todistuksen eri vaiheet.

(1) Muutetaan vektori komponenttimuotoon.

(2) Kerrotaan skalaari s komponenteittain.

(3) Kerrotaan skalaari r komponenteittain.

(4) Käytetään reaalilukujen laskusääntöjä skalaarien r ja s kertomiseksi.

(5) Skalaarilla kertomista hyväksi käyttäen saadaan skalaarien tulo koordinaattisulkeiden ulkopuolelle.

(6) Muutetaan vektori komponenttiesityksestä yksinkertaiseen muotoon.

Täten skalaarilla kertomisen liitännäisyys pätee vektoreille. □

Vektoreiden ominaisuuksia ja operaatioita ei tämän kurssin aikana käsitellä enempää, sillä ne käydään läpi kurssilla MAA4.

3.1.1 Tehtäviä

1. Erottele seuraavien vektorien x-, y- ja z-komponentit.

   a) $\bar{y} = (12, -2, 0)$
   b) $\bar{0}$
   c) $\bar{x} = (l, m, n)$

2. Laske vektorien $\bar{a} = (3, -1)$ ja $\bar{b} = (-2, 3)$ summa ja havainnollista laskutoimitusta kuvalla.

3. Sievennä vektorilauseke

   a) $3(\bar{x} + \bar{y}) - 2(\bar{x} - \bar{y})$
   b) $2(\bar{x} - 2\bar{y}) - 0,5(\bar{y} - \bar{x}) + 1,5(0,8\bar{y} - \bar{x})$.

4. Ratkaise $\bar{x}$ ja $\bar{y}$ yhtälöparista

$$\begin{cases} \bar{x} - 2\bar{y} - \bar{a} = \bar{0} \\ \bar{x} - \bar{y} - 3\bar{b} = \bar{0}. \end{cases}$$

Lisätehtävä: Kehitelkää ryhmässä toisillenne vektoreita sekä vektorilaskuja. Laskekaa ja piirtäkää vastaukset tietokonesovelluksella.

3.2 Matriisit ja matriisien peruslaskuoperaatiota

3.2.1 Matriisit ja niiden summa

Aiemmin käsitelty aihe vektorit ovat erityistapauksia matriiseista. Ne ovat itse asiassa yksisarakkeisia matriiseja. Seuraavaksi esitellään matriisi ja matriisien peruslaskuominaisuuksia.

Määritelmä 2.

Matriisi on matemaattinen suorakulmainen taulukko, jossa on m *riviä* ja n *saraketta*. Toisin sanoen matriisi on muotoa

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Luvut a_{ij} ovat matriisin alkioita. Matriisin *koko* eli *kertaluku* on $m \times n$ [5, s. 53].

Matriiseja merkitään isoilla kirjaimilla ja niitä voidaan merkitä myös lyhyemmin $A = [a_{ij}]$. Jos kaksi matriisia ovat samaa kertaluokkaa ja niiden alkiot ovat samat eli pätee $a_{ij} = b_{ij}$ aina, kun $i = 1, 2, \ldots, m$ ja $j = 1, 2, \ldots, n$, matriisit ovat samat [1, s. 42].

Esimerkki 3.

Matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ja } B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

eivät ole samat, sillä matriisi A on kertaluokkaa 2×3 ja B on kertaluokkaa 2×2. Kuitenkin matriisit A ja

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ovat samat, koska molemmat matriisit ovat kertaluokkaa 2×3 ja $a_{ij} = c_{ij}$ aina, kun $i = 1, 2$ ja $j = 1, 2, 3$.

Matriiseilla voidaan laskea kuten vektoreilla. Matriisien peruslaskutoimituksista esitellään seuraavaksi yhteen- ja vähennyslasku, skalaarilla kertominen sekä matriisien kertominen matriisilla. Olennaista on huomata, että matriisin omat alkiot eivät vaikuta toisiinsa näissä laskutoimituksissa vaan lopputulokseen vaikuttaa toinen matriisi tai skalaari. Määritellään ensimmäiseksi matriisien yhteenlasku.

Määritelmä 3.

Olkoot matriisit A ja B samaa kertaluokkaa. Tällöin matriisien *summa* saadaan laskemalla vastaavat alkiot yhteen eli

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{ij} + b_{ij} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Jos matriisit ovat eri kertaluokkaa, yhteenlaskua ei voi matriisien kesken suorittaa. [1, s. 42]

Erikokoisten matriisien summaa ei ole määritelty, sillä vastaavia alkioita ei ole samaa määrää. Havainnollistetaan tätä esimerkein.

Esimerkki 4.

Lasketaan matriisien summa alkioittain

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Seuraavaa lauseketta ei ole määritelty

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 0 & -1 & -7 \end{bmatrix}.$$

Matriisien omia alkioita ei myöskään saa laskea yhteen

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

3.2.2 Matriisien kertominen skalaarilla ja matriisilla

Edellisessä luvussa tutustuttiin vektorien kertomiseen skalaarilla. Laajennetaan skalaarilla kertominen matriiseihin.

Määritelmä 4.

Olkoon A matriisi ja $c \in \mathbb{R}$ skalaari. Matriisin kertominen skalaarilla suoritetaan alkioittain eli

$$cA = \left[ca_{ij}\right].$$

[1, s. 43]

Kun matriisi kerrotaan skalaarilla, kerrotaan sen jokainen alkio skalaarilla. Vertaa matriisien skalaarilla kertomista vektorien skalaarilla kertomiseen. Huomaa, että skalaarilla voi kertoa minkä tahansa kertaluokan matriisia.

Esimerkki 5.

Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 9 & 3 & -1 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} -7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

matriiseja. Lasketaan $2A$, $-1B$ ja $\frac{1}{2}C$, jolloin saadaan

$$2A = 2\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix},$$

$$-1B = -1\begin{bmatrix} 5 & -8 & 4 \\ 9 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ -9 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\frac{1}{2}C = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -7 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Jos matriisit ovat samaa kertaluokkaa, voidaan matriiseista ja niiden skalaarikertoimista muodostaa lineaarikobinaatio, joka on muotoa

$$c_1A_1 + c_2A_2 + \cdots + c_nA_n.$$

Edellä laskettujen matriisien yksi lineaarikombinaatio on

$$\begin{aligned} 2A - 1B + \frac{1}{2}C &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 8 & -4 \\ -9 & -3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & 17 & -\frac{13}{2} \\ -\frac{15}{2} & 2 & \frac{25}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriiseja voidaan kertoa myös toisella matriisilla. Kuitenkaan kaikkia matriiseja ei voi kertoa keskenään, vaan niiden kertaluokat määräävät matriisin kertolaskun mahdollisuuden.

Esimerkki 6.

Määritellään matriisien tulo seuraavasti. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}.$$

Tällöin matriisien tulo AB saadaan seuraavasti

$$AB = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa + yb + zc & xd + ye + zf \\ ua + vb + wc & ud + ve + wf \end{bmatrix}.$$

Huomataan, että jotta tulo olisi määritelty, ensimmäisen matriisin sarakkeiden lukumäärä on yhtä suuri kuin jälkimmäisen matriisin rivien lukumäärä. Tällöin tulo BA

ei aina ole määritelty, vaikka tulo AB olisi määritelty. Määritellään nyt matriisien tulo vielä täsmällisesti.

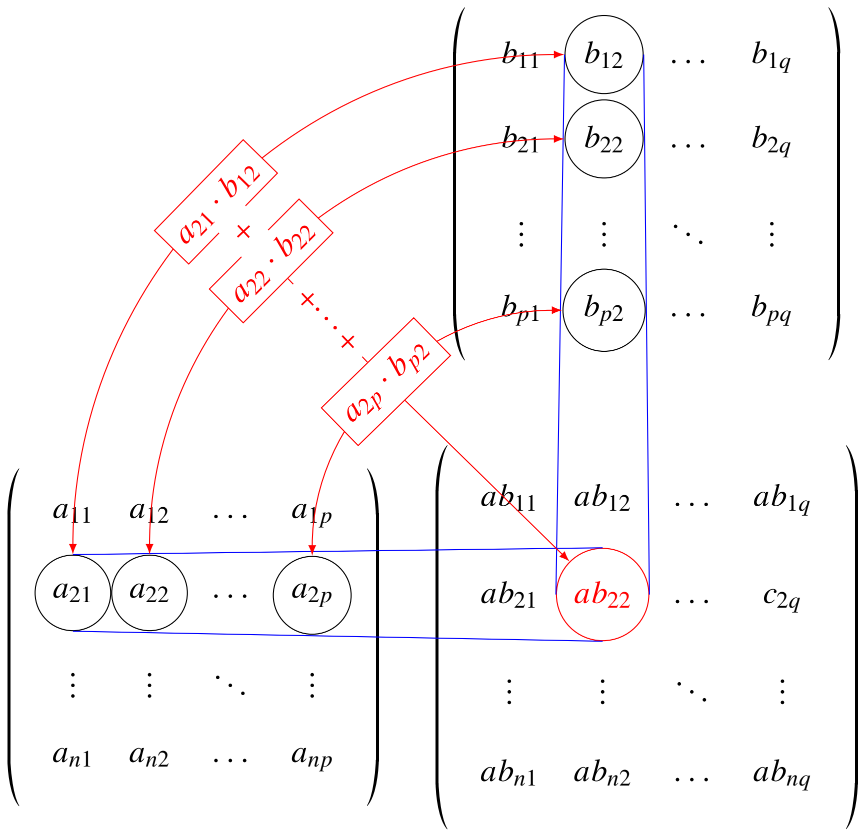
Määritelmä 5.

Olkoon A kertaluokan $m \times r$ matriisi ja B kertaluokan $r \times n$ matriisi. Matriisien tulo AB on kertaluokan $m \times n$ matriisi

$$AB = \left[\sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj} \right]$$

[4, s. 6].

Määritelmän mukaan matriisien kertominen aloitetaan valitsemalla matriisin A ensimmäinen rivi ja matriisin B ensimmäinen sarake. Kerrotaan ensimmäiset alkiot, toiset alkiot ja niin edelleen, minkä jälkeen summattaan tulot, jolloin saadaan tulomatriisin ensimmäisen rivin ensimmäinen alkio. Valitaan sitten toisen matriisin toinen sarake ja tehdään samoin. Tätä jatketaan, kunnes jokainen matriisin B sarakkeet on käyty läpi. Tämän jälkeen valitaan matriisista A seuraava rivi ja matriisista B ensimmäinen sarake ja toistetaan vaiheet. Tätä tehdään niin kauan, kunnes jokainen matriisin A rivi ja matriisin B sarake on käyty läpi.



Yllä olevassa kaaviosta nähdään, miten tulomatriisin AB alkiot a_{ij} saadaan laskettua aina, kun $i = 1, 2, \ldots, n$ ja $j = 1, 2, \ldots, q$. Huomaa, että saadun matriisin rivien lukumäärä saadaan viereisen eli ensimmäisen matriisin rivien lukumäärästä ja sarakkeiden lukumäärä ylhäällä olevan eli jälkimmäisen matriisin sarakkeiden lukumäärästä. Esitetään muutama konkreettiinen esimerkki kertolaskusta.

Esimerkki 7.

Tarkastellaan matriiseja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan matriisien tulo. Koska A on 3×4-matriisi ja B on 4×2-matriisi, niin tulomatriisi AB on kertaluokkaa 3×2. Tulomatriisin

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \\ 6 & 0 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$$

ensimmäisen rivin ensimmäinen alkio on

$$ab_{11} = 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) + 3 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 35.$$

Tulomatriisin ensimmäisen rivin toinen alkio on

$$ab_{12} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot 9 = -1.$$

Loput tulomatriisin alkiot ovat

$$\begin{aligned} ab_{21} &= 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 1 = 2, \\ ab_{22} &= 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 2 \cdot 0 + (-3) \cdot 9 = 9, \\ ab_{31} &= 0 \cdot 3 + (-1) \cdot (-2) + 8 \cdot 6 + 4 \cdot 1 = 54, \\ ab_{32} &= 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 7 + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 9 = 29. \end{aligned}$$

Tulomatriisi AB on

$$AB = \begin{bmatrix} 35 & -1 \\ 2 & 9 \\ 54 & 29 \end{bmatrix}.$$

Esimerkki 8.

Laske matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

tulo AB.

Tulomatriisi kertaluokka on 2×3. Lasketaan alkiot:

$$\begin{aligned} ab_{11} &= 2 \cdot 3 + (-5) \cdot (-1) = 11, \\ ab_{12} &= 2 \cdot 1 + (-5) \cdot 8 = -38, \\ ab_{13} &= 2 \cdot 2 + (-5) \cdot 2 = -6, \\ ab_{21} &= 0 \cdot 3 + 8 \cdot (-1) = -8, \\ ab_{22} &= 0 \cdot 1 + 8 \cdot 8 = 64, \\ ab_{23} &= 0 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

Täten tulomatriisi on

$$\begin{bmatrix} 11 & -38 & -6 \\ -8 & 64 & 16 \end{bmatrix}.$$

3.2.3 Tehtäviä

5. Olkoot

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -8 & 7 & 10 \\ 5 & 9 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 9 \\ 3 & -3 & 7 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

matriiseja. Mitkä ovat matriisien kertaluokat? Kuinka monta alkiota matriiseissa on?

6. Laske

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -8 & 0 \end{bmatrix}$$

c)

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

d)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

7. Laske seuraavat matriisien kertolaskut

a)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Ovatko seuraavat matriisien kertolaskut määriteltyjä?

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & u \\ y & v \\ z & w \end{bmatrix}$$

c)

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 9 & 18 & 2 & -7 \end{bmatrix}.$$

Lisätehtävä: Kehitelkää pareittain 6 matriisien yhteenlaskua ja matriisien kertolaskua. Laskekaa ne tietokonesovelluksen avulla.

3.3 Erityisiä matriiseja ja matriisialgebraa

3.3.1 Nolla- ja identiteettimatriisit

On olemassa erityisiä vektoreita kuten nollavektori. Samaten on olemassa erityisiä matriiseja. Seuraavaksi esitellään nollamatriisi, jonka jälkeen tutustutaan neilö- ja identiteettimatriisiin.

Määritelmä 6.

Nollamatriisi on $m \times n$-matriisi, jonka jokainen alkio on 0. Nollamatriisia merkitään $\underset{\sim}{0} = [0]$. Jos on merkityksellistä nähdä matriisin koko, merkitään $\underset{\sim}{0} = [0]_{m \times n}$. [1, s. 65]

Huomataan, että jos matriisi A ja $\underline{0}$ ovat saman kertaluokan matriiseja, pätee $A + 0 = 0 + A = A$.

Esimerkki 9.

$$A + \underline{0} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

Identiteettimatriisia varten tutustutaan neliömatriisiin ja diagonaalialkioon.

Määritelmä 7.

Olkoon matriisi A kertaluokkaa $n \times n$. Tällöin A on *neliömatriisi*. Neliömatriisin alkiot $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ ovat *diagonaalialkioita*. Jos neliömatriisin alkiot $a_{ij} = 0$, kun $i \neq j$, niin matriisi A on *diagonaalimatriisi*, jota merkitään $A = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. [1, s. 42], [4, s. 5]

Esimerkki 10.

Olkoon M seuraava neliömatriisi

$$M = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Matriisin M diagonaalialkiot ovat -4, 6 ja 7.

Seuraava tärkeä erityismatriisi on identiteettimatriisi, joka on erikoistapaus diagonaalimatriisista.

Määritelmä 8.

Identiteettimatriisi on $n \times n$-matriisi, jonka diagonaalialkiot ovat arvoltaan 1 ja muut alkiot ovat arvoltaan 0. Identiteettimatriisia merkitään yksinkertaisesti I tai täsmällisesti I_n. [1, s. 67]

Esimerkki 11.

Identiteettimatriiseja ovat muun muassa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ja} \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

3.3.2 Matriisien laskulakeja

Aiemmin esiteltiin matriisien yhteenlasku. Matriisien erotus lasketaan samalla tavalla kuin matriisien yhteenlasku. Määritellään kuitenkin matriisien erotus täsmällisesti, mutta ennen sitä on määriteltävä vastamatriisi.

Määritelmä 9.

Matriisin A *vastamatriisi* on $-A$ on matriisi, jolle pätee

$$A + (-A) = (-A) + A = \underline{0}.$$

[4, s. 9]

Huomataan, että matriisien yhteenlasku suoritetaan alkioittain, joten vastamatriisin alkiot ovat matriisin alkioiden vasta-alkioita. Vastamatriisi on yksikäsitteinen eli jokaiselle matriisille on vain yksi vastamatriisi.

Esimerkki 12.

Seuraavan yhteenlaskun matriisit ovat toistensa vastamatriiseja, koska

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Määritellään matriisien erotus vastamatriisin ja matriisien yhteenlaskun avulla.

Määritelmä 10.

Olkoot matriisit $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Tällöin matriisien erotus saadaan laskemalla matriisi A ja matriisin B vastamatriisi yhteen

$$A - B = A + (-B) = [a_{ij} + (-b_{ij})] = [a_{ij} - b_{ij}].$$

[1, s. 42], [4, s.10]

Matriiseille eivät päde kaikki samat laskulait kuin reaaliluvuille. Esitetään esimerkki siitä, että matriisin kertolaskun vaihdannaisuus ei aina päde.

Esimerkki 13.

Olkoot A ja B 2×2-matriiseja seuraavasti

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Matriisien tuloksi saadaan

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 18 \\ -2 & 19 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} -9 & 26 \\ -4 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = BA.$$

Täten matriisien kertolaskun vaihdannaisuus ei aina päde.

Edellisestä esimerkistä huolimatta matriiseille pätevät seuraavat laskulait:

Olkoot A $m \times n$-matriisi, B ja C sellaisia matriiseja, joille seuraavat matriisien yhteenlaskut ja kertolaskut ovat määriteltyjä, ja r ja s reaalilukuisia skalaareja.

Yhteenlaskun vaihdannaisuus: $A + B = B + A$

Yhteenlaskun liitännäisyys: $(A + B) + C = A + (B + C)$

Nollamatriisin lisääminen: $A + \underline{0} = \underline{0} + A = A$

1. osittelulaki: $r(A + B) = rA + rB$

2. osittelulaki: $(r + s)A = rA + sA$

Skalaarilla kertomisen liitännäisyys: $r(sA) = (rs)A$

Kertolaskun liitännäisyys: $A(BC) = (AB)C$

Kertolaskun distributiivisuus vasemmalta: $A(B + C) = AB + AC$

Kertolaskun distributiivisuus oikealta: $(B + C)A = BA + CA$

Tulon kertominen skalaarilla: $r(AB) = (rA)B = A(rB)$

Identiteettimatriisilla kertominen: $I_m A = A = AI_n$.
[7, s. 93, 97]

Kuten edellisessä esimerkissä todettiin, yleisesti ei päde, että $AB = BA$. Samoin ei yleisesti päde, että jos $AB = AC$, niin $B = C$. Myöskään ei aina päde, jos matriisien tulo $AB = \underset{\sim}{0}$, niin $A = \underset{\sim}{0}$ tai $B = \underset{\sim}{0}$. Todistetaan laskulaeista identiteettimatriisilla kertominen.

Todistus: Identiteettimatriisilla kertominen. Olkoot A $m \times n$-matriisi, I_m $m \times m$-identiteettimatriisi ja I_n $n \times n$-identiteettimatriisi. Kun identiteettimatriisilla kerrotaan vasemmalta, saadaan

$$\begin{aligned}
I_m A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & a_{12} + 0 & \cdots & a_{1n} + 0 \\ 0 + a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & \cdots & 0 + a_{2n} + 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 + a_{m1} & 0 + a_{m2} & \cdots & 0 + a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= A.
\end{aligned}$$

Kun identiteettimatriisi kerrotaan oikealta, saadaan

$$\begin{aligned}
AI_n &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + 0 & 0 + a_{12} + 0 & \cdots & 0 + a_{1n} \\ a_{21} + 0 & 0 + a_{22} + 0 & \cdots & 0 + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + 0 & 0 + a_{m2} + 0 & \cdots & 0 + a_{mn} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= A.$$

Kun yhdistetään saadut tulokset, saadaan, että $I_m A = A = AI_n$. □

3.3.3 Transpoosi ja käänteismatriisi

Joskus on olennaista käyttää matriisin transpoosia tai käänteismatriisia, joten tutustutaan nyt niihin.

Määritelmä 11.

Olkoon A $m \times n$-matriisi. Silloin $n \times m$-matriisi B on matriisin A *transpoosi*, jossa $b_{ij} = a_{ji}$. Transpoosia merkitään $B = A^T$. [11, s. 49]

Transpoosissa i:nneksi sarakkeeksi tulee alkuperäisen matriisin i:nnes rivi.

Esimerkki 14.

Matriisien

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 3 \end{bmatrix}$$

transpoosit ovat

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 10 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } C^T = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esitellään seuraavaksi oleelliset transpoosin laskulait, joista ensimmäinen todistetaan.

A ja B ovat kuhunkin kohtaan sopivia matriiseja ja $k \in \mathbb{R}$ on skalaari.

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A + B)^T = A^T + B^T$
3. $(AB)^T = B^T A^T$. [3, s. 74]

Todistus: Olkoon $A = [a_{ij}]$ $m \times n$-matriisi. Nyt A:n transpoosin transpoosiksi saadaan

$$\begin{aligned}(A^T)^T &= ([a_{ij}]^T)^T \\ &= [a_{ji}]^T \\ &= [a_{ij}] \\ &= A.\end{aligned}$$

□

Matriisien soveltamista varten on tärkeää määritellä käänteismatriisi.

Määritelmä 12.

Olkoot A ja B saman kertaluokan neliömatriiseja. Tällöin B on matriisin A *käänteismatriisi*, jos

$$AB = BA = I.$$

Tällöin matriisi A on *kääntyvä*. Käänteismatriisia merkitään A^{-1}. [1, s. 68]

Esimerkki 15.

Onko matriisin

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

käänteismatriisi

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}?$$

Lasketaan matriisien tulot AA^{-1} ja $A^{-1}A$:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 & 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-4) \\ 3 \cdot (-2) + 2 \cdot (3) & 3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ A^{-1}A &= \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 & -2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + (-4) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Matriisi A^{-1} on matriisin A käänteismatriisi.

3.3.4 Lineaarisen yhtälöryhmän ratkaiseminen matriisien avulla

Yhtälön käsite on tuttu peruskoulun yläluokilta. Tällä kurssilla ollaan kiinnostuneita nimenomaan lineaarisista yhtälöistä, jotka koostuvat summista, joissa termit ovat vakioita tai ensimmäisen asteen muuttujan ja vakion tuloja. Yhtälöpari koostuu kahdesta yhtälöstä ja yhtälöryhmä taas kahdesta tai useammasta yhtälöstä. Lineaarisen yhtälöryhmän yleinen muoto on

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

missä luvut $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ovat tuntemattomia muuttujia, luvut a_{ij} ovat vakiokertoimia, luvut ij on vakiokertoimen indeksi ja luvut b_i ovat vakiotermejä [4, s. 22].Yllä esitetyssä yhtälöryhmässä on m yhtälöä ja n muuttujaa. Yhtälöparin ja -ryhmän ratkaisumenetelmät oletetaan tutuiksi kurssilta MAA1, joten niitä ei tällä kurssilla käydä läpi.

Joskus isoja yhtälörymiä on helpompi ratkaista matriisien avulla kuin perinteisillä menetelmillä. Tarkastellaan seuraavaa yhtälöryhmää

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 & + \cdots + a_{3n}x_n & = b_3 \\ \qquad\vdots & & = \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & + \cdots + a_{nn}x_n & = b_n. \end{cases}$$

Tuntemattomia muuttujia ja yhtälöitä on n kappaletta. Merkitään nyt muuttujia matriisilla $X = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]^T$, vakiotermejä matriisilla $B = [b_1\ b_2\ \ldots\ b_n]^T$ ja vakiokertoimia matriisilla $A = [a_{ij}]$. Näiden avulla voidaan muodostaa matriisiyhtälö $AX = B$. Jos A on kääntyvä määritelmän 12 mukaan, niin matriisiyhtälön ratkaisu on $X = A^{-1}B$. Tällä kurssilla muuttujia on yksi, kaksi tai kolme. Näin ollen muuttujamatriisia merkitään $X = [x]^T$, $X = [x\ y]^T$ tai $X = [x\ y\ z]^T$ muuttujien määrän mukaan.

Esimerkki 16.

Tarkastellaan yhtälöryhmää

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = 0 \\ -x + 9y + 5z = 8 \\ 4x + 0y - 6z = 2. \end{cases}$$

Muodostetaan matriisit X, B ja A. Muuttujamatriisiksi saadaan

$$X = [x\ y\ z]^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

vakiotermimatriisiksi saadaan

$$B = [0\ 8\ 2]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ja vakiokerroinmatriisiksi saadaan

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ -1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}.$$

Tällöin matriisiyhtälö $AX = B$ on

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ -1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ennen kuin perehdytään nopeaan tapaan ratkaista matriisiyhtälö, esitellään determinantin käsite. Determinantti on funktio, joka yhdistää reaaliluvun neliömatriisiin. Determinanttia ei tarvitse tällä kurssilla tarkemmin määritellä sen haastavuuden vuoksi. Tällä kurssilla determinanttia käytetään hyväksi 2×2- ja 3×3-matriiseilla, joten myöskään kofaktoria ei ole tarve käydä läpi. Matriisin A determinanttia merkitään notaatioilla $\det(A)$ ja $|A|$. Seuraavaksi esitellään kaavat, joilla determinantti voidaan laskea:

2×2-matriisi: $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

3×3-matriisi: $\det \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}.$

[10, s. 23]

Esimerkki 17.

Olkoon

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matriisien determinantit ovat

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 4 \cdot 1 = -4,$$

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 4 & -2 & 7 \\ 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 4 \cdot (5 \cdot (-1) - 0 \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot (-1) - 0 \cdot 3) + 7 \cdot (1 \cdot 2 - 5 \cdot 3) \\ &= -113. \end{aligned}$$

Matriisiyhtälön ratkaisemisessa voidaan käyttää hyväksi determinanttia. Tätä ratkaisumenetelmää kutsutaan *Cramerin säännöksi*.

Olkoon $AX = B$ matriisiyhtälö, missä $\det A \neq 0$. Olkoon matriisi A_j matriisi, jonka j:nnes sarake korvataan matriisilla B. Tällöin matriisiyhtälön ratkaisu on

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \ldots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

[1, s. 137]

Esimerkki 18.

Olkoon yhtälöryhmä sama kuin esimerkissä 17. Matriisiyhtälöksi $AX = B$ saatiin

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -7 \\ -1 & 9 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Muodostetaan A_1, A_2 ja A_3, jolloin

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -7 \\ 8 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -7 \\ -1 & 8 & 5 \\ 4 & 2 & -6 \end{bmatrix} \text{ ja } A_3 = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 9 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan edellä muodostettujen matriisien determinantit sekä matriisin A determinantti:

$$
\begin{aligned}
\det A_1 &= 0 \cdot (9 \cdot (-6) - 5 \cdot 0) - 4 \cdot (8 \cdot (-6) - 5 \cdot 2) + (-7) \cdot (8 \cdot 0 - 9 \cdot 2) \\
&= 358, \\
\det A_2 &= 3 \cdot (8 \cdot (-6) - 5 \cdot 2) - 0 \cdot (-1 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) + (-7) \cdot (-1 \cdot 2 - 8 \cdot 4) \\
&= 64, \\
\det A_3 &= 3 \cdot (9 \cdot 2 - 8 \cdot 0) - 4 \cdot (-1 \cdot 2 - 8 \cdot 4) + 0 \cdot ((-1) \cdot 0 - 9 \cdot 4) \\
&= 190, \\
\det A &= 3 \cdot (9 \cdot (-6) - 5 \cdot 0) - 4 \cdot (-1 \cdot (-6) - 5 \cdot 4) + (-7) \cdot (-1 \cdot 0 - 9 \cdot 4) \\
&= 146.
\end{aligned}
$$

Koska $\det A \neq 0$, Cramerin sääntöä voidaan käyttää matriisiyhtälön ja siten yhtälöparin ratkaisemiseen. Ratkaistaan muuttujat x, y ja z Cramerin säännöllä, jolloin saadaan

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{\det A_1}{\det A} = \dfrac{358}{146} = \dfrac{179}{73} \approx 2{,}45 \\
y = \dfrac{\det A_2}{\det A} = \dfrac{64}{146} = \dfrac{32}{73} \approx 0{,}44 \\
z = \dfrac{\det A_3}{\det A} = \dfrac{190}{146} = \dfrac{95}{73} \approx 1{,}30.
\end{cases}
$$

Leontiefin panos-tuotos -mallin käsittelyssä on ymmärrettävä, mitä ominaisarvo tarkoittaa. Esitellään kyseinen käsite seuraavaksi.

Määritelmä 13.

Olkoon $A = [a_{ij}]$ $m \times m$-matriisi. Luku λ on matriisin A *ominaisarvo*, jos on olemassa matriisi $x = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T \neq 0$ siten, että

$$Ax = \lambda x.$$

Yhtälön toteuttavat matriisit x ovat ominaisarvoon λ liittyviä *ominaisvektoreita* [8, s. 23].

Määritelmässä 13 mainittu yhtälö voidaan kirjoittaa muodossa $Ax = \lambda I x$, joka puolestaan voidaan muokata muotoon $(A - \lambda I)x = 0$. Kun $\det(A - \lambda I) = 0$, saadaan eitriviaaleja ratkaisuja matriisiksi x. [8, s. 24]. Tällä kurssilla ei oleteta, että opiskelija osaisi ratkaista matriisin ominaisarvot.

3.3.5 Tehtäviä

9. Muodosta nollamatriisi, joka on kertaluokkaa

   a) 2×3

b) 1×5

c) 4×4

d) 1×1.

10. Mitkä ovat seuraavien matriisien diagonaalialkiot?

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -4 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 10 \\ -2 & 5 & 1 \\ 9 & -5 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 6 \\ 2 & -9 & -2 \end{bmatrix}$

11. Mitkä seuraavista ovat identiteettimatriiseja?

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

12. Laske seuraavien matriisien vastamatriisit

a) $\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 9 & 0 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

13. Laske seuraavat vähennyslaskut

a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 9 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \end{bmatrix}.$

14. Olkoot

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ ja } C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Laske $A(BC)$ ja $(AB)C$.

15. Olkoot $r,s \in \mathbb{R}$ skalaareja ja A,B samankokoisia matriiseja. Todista, että

a) $r(A + B) = rA + rB$

b) $(r + s)A = rA + sA$.

16. Laske tehtävän 10 matriisien transpoosit.

17. Olkoot matriisit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ -3 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Laske, onko jokin matriisi toisen matriisin käänteismatriisi.

18. Ratkaise seuraavat yhtälöryhmät yhtälön eliminointimenetelmällä ja Cramerin säännöllä muodostaen matriisiyhtälö

a)

$$\begin{cases} -2x + y = -3 \\ 6x + 2y = 14 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} -x + 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 5 \\ 2x - 2y + 6z = -11 \end{cases}.$$

19. Onko suorilla $y = x - 5$, $y = \frac{3}{4}x + 1$ ja $y = \frac{1}{2}x + 7$ yhteinen leikkauspiste? Tutki matriisien avulla.

Lisätehtävä: Laske tehtävien 13. ja 14. vastausten käänteismatriisit ja transpoosit tietokonesovellusten avulla.

4 Matriisit ja taloustiede

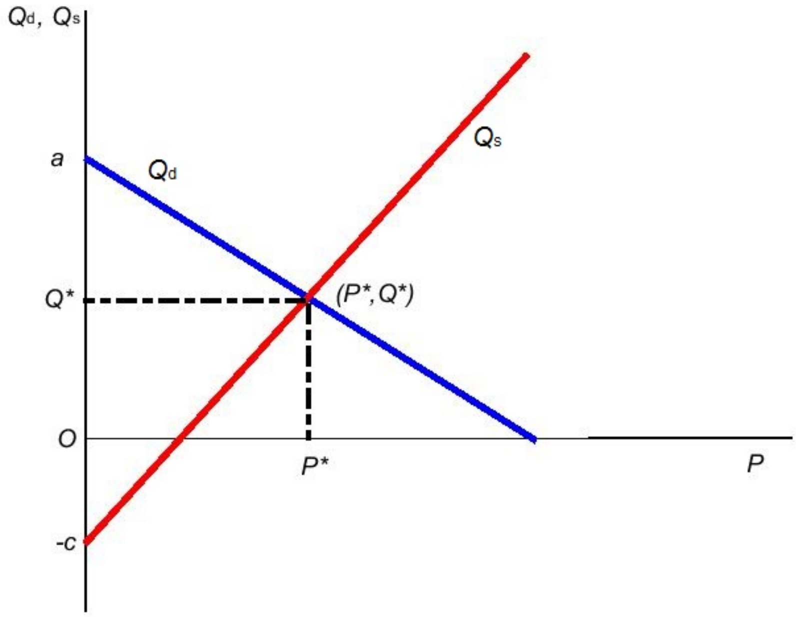
Matriiseja voidaan hyödyntää monessa käytännön laskussa. Tällä kurssilla käsitellään muutamia talousmalleja, joissa käytetään matriiseja laskuvälineenä. Malleihin perehdytään vain pinnallisesti.

4.1 Kysyntä-tarjonta -malli

Markkinamalleissa voidaan käyttää hyväksi opittuja matriisin ominaisuuksia. Kysyntä-tarjonta -malli on yksi taloustieteen tärkeimmistä malleista. Malli rakennetaan kolmen muuttujan avulla: Q_d on kysytyn tavaran tai hyödykkeen määrä, Q_s on tavaran tai hyödykkeen tarjonnan määrä ja P on hinta. Standardi markkinan tasapainoehto on, että kysyntä ja tarjonta ovat yhtä suuret eli $Q_d - Q_s = 0$. Kysytyn tavaran ja tarjotun tavaran määrä määritellään hinnan lineaariseksi funktioksi. Kysyntä Q_d on hinnan P lineaarisesti vähenevä funktio. Toisin sanoen kun hinta P kasvaa, kysyntä Q_d laskee. Päinvastoin tarjonta Q_s on hinnan P lineaarisesti kasvava funktio. Näin ollen kun hinta P kasvaa, tarjonta Q_s myöskin kasvaa. Muodostetaan funktiot

$$\begin{cases} Q_d = a - bP & (a, b > 0) \\ Q_s = -c + dP & (c, d > 0), \end{cases}$$

missä a, b, c, d ovat reaalilukuja.



Kuva 4.1: Kysyntä ja tarjonta funktioina

Kuvassa 4.1 on esitetty koordinaatistossa kysynnän ja tarjonnan funktiot. Pisteessä (P^*, Q^*) on funktioiden leikkauspiste, jossa tasapainoehto toteutuu. [3, s. 31-32]

Esimerkki 19.

Markkinamallina on seuraava kysyntä-tarjonta -malli:

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = 51 - 3P \\ Q_s = -10 + 6P. \end{cases}$$

Lasketaan hinta, tarjonta ja kysyntä tasapainossa. Koska kysyntä ja tarjonta ovat yhtä suuret, niin funktiotkin ovat. Täten saadaan $51 - 3P = -10 + 6P$ ja edelleen hinnaksi saadaan $P = \frac{61}{9}$. Sijoitetaan hinta tarjonnan lausekkeeseen, jolloin saadaan sekä tarjonnaksi että kysynnäksi $Q_s = \frac{92}{3} = Q_d$.

Kun kahden tavaran kysyntä ja tarjonta ovat suhteessa toisiinsa, malli monimutkaistuu. Tällöin kysyntä-tarjonta -mallina on

$$\begin{cases} Q_{d1} - Q_{s1} = 0 \\ Q_{d1} = a_0 + a_1P_1 + a_2P_2 \\ Q_{s1} = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 \\ Q_{d2} - Q_{s2} = 0 \\ Q_{d2} = c_0 + c_1P_1 + c_2P_2 \\ Q_{s2} = d_0 + d_1P_1 + d_2P_2, \end{cases}$$

missä Q_{d1} on ensimmäisen tuotteen kysyntä, Q_{s1} ensimmäisen tuotteen tarjonta, Q_{d2} toisen tuotteen kysyntä, Q_{s2} toisen tuotteen tarjonta, P_1 ensimmäisen tuotteen hinta, P_2 toisen tuotteen hinta ja a_i, b_i, c_i, d_i ovat reaalilukuja, missä $i = 0, 1, 2$. Malli pätee sekä positiivisilla että negatiivisilla kertoimien a_i, b_i, c_i, d_i arvoilla. Kun supistetaan kysyntä ja tarjonta yhtälöistä pois, saadaan yksinkertaisempi muoto

$$\begin{cases} (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)P_1 + (a_2 - b_2)P_2 = 0 \\ (c_0 - d_0) + (c_1 - d_1)P_1 + (c_2 - d_2)P_2 = 0. \end{cases}$$

Merkitään nyt $\alpha_i = a_i - b_i$ ja $\beta_i = c_i - d_i$, kun $i = 0, 1, 2$. Täten edellistä yhtälöparia saadaan vielä yksinkertaistettua muotoon

$$\begin{cases} \alpha_1P_1 + \alpha_2P_2 = -\alpha_0 \\ \beta_1P_1 + \beta_2P_2 = -\beta_0. \end{cases}$$

Lineaarisen yhtälöryhmän kerroinmatriisiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}.$$

Jotta voidaan hyödyntää Cramerin sääntöä, täytyy selvittää determinantit. Determinanteiksi saadaan

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \\
|A_1| &= \begin{vmatrix} -\alpha_0 & \alpha_2 \\ -\beta_0 & \beta_2 \end{vmatrix} = -\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 \\
|A_2| &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & -\alpha_0 \\ \beta_1 & -\beta_0 \end{vmatrix} = -\alpha_1\beta_0 + \alpha_0\beta_1.
\end{aligned}$$

Cramerin säännön avulla saadaan laskettua hinnat tasapainossa

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \\
P_2 &= \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}.
\end{aligned}$$

[3, s. 108]

4.1.1 Tehtäviä

20. Laske hinta P, tarjonta Q_s ja kysyntä Q_d tasapainossa, kun mallina on

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = 10 - 2P \\ Q_s = -3 + 4P. \end{cases}$$

21. Laske hinta P, tarjonta Q_s ja kysyntä Q_d tasapainossa, kun mallina on

$$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = 1 - \dfrac{1}{2}P \\ Q_s = -1 + 2P. \end{cases}$$

22. Laske Cramerin säännön avulla kahden tuotteen kysyntä, tarjonta ja hinta tasapainossa, kun mallina on

$$\begin{cases} Q_{d1} = Q_{s1} \\ Q_{d1} = 1 + 3P_1 - P_2 \\ Q_{s1} = -3 + P_1 + 4P_2 \\ Q_{d2} = Q_{s2} \\ Q_{d2} = 4 + 4P_1 - 4P_2 \\ Q_{s2} = -3 + 5P_1 + 2P_2. \end{cases}$$

23. Laske Cramerin säännön avulla kahden tuotteen kysynnät Q_{d1} ja Q_{d2}, tarjonnat Q_{s1} ja Q_{s2} sekä hinnat P_1 ja P_2 tasapainossa, kun mallina on

$$\begin{cases} Q_{d1} = Q_{s1} \\ Q_{d1} = -2P_1 - 2P_2 \\ Q_{s1} = 3 - P_1 + P_2 \\ Q_{d2} = Q_{s2} \\ Q_{d2} = 5 + 2P_1 + 2P_2 \\ Q_{s2} = -3 + 8P_1 - 3P_2. \end{cases}$$

24. Pohdi, miksi on tärkeää tietää kysyntä, tarjonta ja hinta tasapainossa.

25. Esitä kaksi tuotetta, joiden kysyntä ja tarjonta riippuvat toisistaan.

Lisätehtävä: Tarkasta yllä olevat tehtävät tietokonesovelluksen avulla.

4.2 Kansantulomalli

Keynesiläisen kansantulomallin mukaan kulutus saa yritykset hankkimaan hyödykkeitä ja palveluita. Jos kulutus heikkenee, yritykset vähentävät tuotantoa [6, s. 27]. Tämä malli kuvataan matemaattisesti yhtälöparilla

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = a + bY, \end{cases}$$

missä Y kuvastaa kansantuloa eli bruttokansantuotetta, C yksityistä kulutusta, I_0 bruttomuodostusta eli investointeja, G_0 julkista kulutusta, a vakiota ja b rajakulutusalttiutta siten, että $a > 0$ ja $0 < b < 1$. Yhtälöparin ensimmäinen yhtälö kuvaa tasapainoehtoa, jossa kansantulo ja suunnitellut kokonaismenot ovat yhtä suuria. Toinen yhtälö on kulutusfunktio, jossa vakio a kuvastaa riippumattomia kulutusmenoja ja b marginaalista taipumusta kuluttaa. Yhtälöparia voidaan muokata jatkokäsittelyä varten sopivaksi

$$\begin{cases} \quad Y - C = I_0 + G_0 \\ -bY + C = a, \end{cases}$$

Täten vakiokerroinmatriisiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{bmatrix}$$

ja vakiotermimatriisiksi

$$\begin{bmatrix} I_0 + G_0 \\ a \end{bmatrix}.$$

Determinanteiksi saadaan

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix} = 1 - b$$
$$\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix} = I_0 + G_0 + a$$
$$\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -b & a \end{vmatrix} = a + b(I_0 + G_0).$$

Cramerin säännöllä kansantulo Y ja kokonaiskulutus C tasapainossa ovat

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} I_0 + G_0 & -1 \\ a & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{I_0 + G_0 + a}{1 - b}$$
$$C = \frac{\begin{vmatrix} 1 & I_0 + G_0 \\ -b & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1 \end{vmatrix}} = \frac{a + b(I_0 + G_0)}{1 - b}.$$

[3, s.46, 108], [9, s. 139, 211].

Esimerkki 20.

Kansantulomallina on

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 14 + \frac{1}{2}Y \\ I_0 = 28 \\ G_0 = 8. \end{cases}$$

Sijoitetaan I_0 ja G_0 ylimpään yhtälöön ja muokataan saatua yhtälöparia niin, että saadaan muodostettua sopivat matriisit:

$$\begin{cases} Y - C = 28 + 8 \\ -\frac{1}{2}Y + C = 14. \end{cases}$$

Tällöin vakiokerroinmatriisiksi saadaan

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

ja vakiotermimatriisiksi

$$\begin{bmatrix} 28 + 8 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Lasketaan tarvittavat determinantit:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$\begin{vmatrix} 36 & -1 \\ 14 & 1 \end{vmatrix} = 36 + 14 = 50$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 36 \\ -\frac{1}{2} & 14 \end{vmatrix} = 14 + \frac{1}{2} \cdot 36 = 32.$$

Tällöin tasapainossa kansantulo Y ja kokonaiskulutus C ovat

$$\begin{cases} Y = \dfrac{50}{\frac{1}{2}} = 100 \\ C = \dfrac{32}{\frac{1}{2}} = 64. \end{cases}$$

4.2.1 Tehtäviä

26. Muodostamalla tarpeelliset matriisit laske kansantulo Y ja kokonaiskulutus C tasapainossa, kun kansantulomallina on

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 9 + \dfrac{2}{7}Y \\ I_0 = 4 \\ G_0 = 3. \end{cases}$$

27. Laske kansantulo Y ja kokonaiskulutus C tasapainossa, kun kansantulomallina on

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = -14 + \dfrac{3}{8}Y \\ I_0 = 87 \\ G_0 = 1. \end{cases}$$

28. Laske kansantulo Y ja kokonaiskulutus C tasapainossa, kun kansantulomallina on

$$\begin{cases} Y = C + I_0 + G_0 \\ C = 25 + 6Y^{\frac{1}{2}} \\ I_0 = 16 \\ G_0 = 14. \end{cases}$$

Vihje: sijoita C, I_0 ja G_0 ylimpään yhtälöön ja muodosta toisen asteen yhtälö korvaamalla Y ja $Y^{\frac{1}{2}}$ sopivalla muuttujalla. [3, s. 47]

Lisätehtävä: Tarkasta yllä olevat tehtävät tietokonesovelluksen avulla.

4.3 Panos-tuotos -malli

Vuonna 1973 Wassily Leontief voitti Nobel-palkinnon taloustieteessä kehittämästään mallista. Tämä malli on panos-tuotos -malli. Mallissa talous jaetaan toimialoihin ja tarkastellaan, miten toimialojen tuotokset ovat panoksia toisille toimialoille. Malli voidaan esittää matriisiyhtälönä

$$x = Cx + d,$$

missä x on kokonaistuotosvektori, C välillisen kysynnän kerroinmatriisi ja d kysyntävektori. Välillinen kysyntä kertoo, kuinka paljon tuotosta tarvitaan panoksena muille toimialoille. Panoksen ja tuotoksen yksikkönä on miljoona dollaria tai euroa, jolloin laskeminen helpottuu. Kokonaistuotoksen laskemiseksi malli on muutettava toiseen muotoon, jota kutsutaan Leontief-yhtälöksi

$$(I - C)x = d,$$

missä I on identiteettimatriisi. [7, s. 132-133]. Jotta yhtälö voidaan ratkaista Cramerin säännöllä, matriisin A suurimman ominaisarvon λ_i on oltava pienempi kuin 1. Muuten vähintään yksi laskettavista determinanteistai ei ole positiivinen, jolloin malli ei päde. [11, s. 260]. Tällä kurssilla ei kuitenkaan oleteta, että opiskelija osaa laskea matriisin ominaisarvoja, joten opiskelijan ei tarvitse osata selvittää, onko kysynnän kerroinmatriisi malliin sopiva.

Esimerkki 21.

Toimialalla A 0,3 yksikköä on välituotteita, jotka ovat panoksena jatkotuotantoon. A:n tuotoksesta 0,2 yksikköä myydään toimialalle B ja 40 yksikköä ovat lopputuotteita, jotka päättyvät kuluttajille. Vastaavasti toimialalla B 0,1 yksikköä päätyy omaan jatkotuotantoon, 0,1 yksikköä myydään toimialan A yrityksille ja 0,3 yksikköä toimialan C yrityksille. Kuluttajille päätyy 50 yksikköä. Toimialan C omaan käyttöön päätyy 0,8 yksikköä. Toimialalle A myydään 0,1 yksikköä ja kuluttajille päätyy 80 yksikköä. Selvitetään kokonaistuotos Leontief-yhtälön avulla. Muodostetaan tarvittavat matriisit eli välillinen kysyntä on

$$C = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,8 \end{bmatrix}$$

ja kysyntävektori on

$$d = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}.$$

Muodostetaan Leontief-yhtälö

$$
\begin{aligned}
(I - C)x &= d \\
\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,3 & 0,2 & 0 \\ 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,1 & 0 & 0,8 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,9 & -0,3 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 80 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Lasketaan determinantit:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 & 0 \\ -0,3 & 0,9 & -0,3 \\ -0,1 & 0 & 0,2 \end{vmatrix} &= 0,7 \cdot (0,9 \cdot 0,2 - (-0,3) \cdot 0) - (-0,2) \cdot (-0,3 \cdot 0,2 \\
&\quad - (-0,3) \cdot (-0,1)) + 0 \cdot (-0,3 \cdot 0 - 0,9 \cdot (-0,1)) \\
&= 0,1134 \\
\begin{vmatrix} 40 & -0,2 & 0 \\ 50 & 0,9 & -0,3 \\ 80 & 0 & 0,2 \end{vmatrix} &= 40 \cdot (0,9 \cdot 0,2 - (-0,3) \cdot 0) - (-0,2) \cdot (50 \cdot 0,2 \\
&\quad - (-0,3) \cdot 80)) + 0 \cdot (50 \cdot 0 - 0,9 \cdot 80) \\
&= 14 \\
\begin{vmatrix} 0,7 & 40 & 0 \\ -0,3 & 50 & -0,3 \\ -0,1 & 80 & 0,2 \end{vmatrix} &= 0,7 \cdot (50 \cdot 0,2 - (-0,3) \cdot 80) - 40 \cdot (-0,3 \cdot 0,2 \\
&\quad - (-0,3) \cdot (-0,1)) + 0 \cdot (-0,3 \cdot 80 - 50 \cdot (-0,1)) \\
&= 27,4 \\
\begin{vmatrix} 0,7 & -0,2 & 40 \\ -0,3 & 0,9 & 50 \\ -0,1 & 0 & 80 \end{vmatrix} &= 0,7 \cdot (0,9 \cdot 80 - 50 \cdot 0) - (-0,2) \cdot (-0,3 \cdot 80 \\
&\quad - 50 \cdot (-0,1)) + 40 \cdot (-0,3 \cdot 0 - 0,9 \cdot (-0,1)) \\
&= 50,2.
\end{aligned}
$$

Selvitetään Cramerin säännöllä x, y ja z, jolloin saadaan

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{14}{0,1134} \approx 123,5 \\
y = \dfrac{27,4}{0,1134} \approx 241,6 \\
z = \dfrac{50,2}{0,1134} \approx 442,7.
\end{cases}
$$

Toimialan *A* kokonaistuotos on 123,5, toimialan *B* kokonaistuotos on 241,6 ja toimialan *C* kokonaistuotos on 442,7.

4.3.1 Tehtäviä

30. Olkoon kysyntävektori
$$d = \begin{bmatrix} 120 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$$
ja välillinen kysyntä
$$A = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,24 \end{bmatrix}.$$
Laske kokonaistuotos.

31. Olkoon kysyntävektori
$$d = \begin{bmatrix} 7 \\ 50 \\ 19 \end{bmatrix}$$
ja välillinen kysyntä
$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,48 & 0,02 \\ 0,5 & 0,4 & 0,02 \\ 0,12 & 0,3 & 0,27 \end{bmatrix}.$$
Laske kokonaistuotos.

32. Toimialalla A 0,2 yksikköä on välituotteita, jotka ovat panoksena jatkotuotantoon. A:n tuotoksesta 0,4 yksikköä myydään toimialalle B ja 20 yksikköä ovat lopputuotteita, jotka päättyvät kuluttajille. Vastaavasti toimialalla B 0,7 yksikköä päätyy omaan jatkotuotantoon ja 0,1 yksikköä myydään toimialan A yrityksille. Kuluttajille päätyy 22 yksikköä. Laske kokonaistuotos.

33. Toimialan K tuotoksesta kuluttajille päätyy 26 yksikköä, toimialan L tuotoksesta 75 yksikköä ja toimialan M tuotoksesta 57 yksikköä. Toimialan K tuotoksesta 0,35 yksikköä päätyy omaan jatkotuotantoon ja 0,17 myydään toimialalle L ja 0,27 yksikköä toimialalle M. Vastaavasti toimialan L tuotoksesta 0,35 yksikköä päätyy omaan jatkotuotantoon ja 0,29 yksikköä myydään toimialalle M. Toimialalta M omaan tuotantoon päätyy 0,7 yksikköä ja 0,14 myydään toimialalle K ja 0,1 yksikköä toimialalle L. Laske kokonaistuotos.

Lisätehtävä: Tarkasta yllä olevat tehtävät tietokonesovelluksen avulla.

5 Vastauksia

1. a) x-komponentti on 12, y-komponentti -2, z-komponentti 0.

   b) x-komponentti on 0, y-komponentti 0, z-komponentti 0.

   c) x-komponentti on l, y-komponentti m, z-komponentti n.

2. $(1,2)$

3. a) $\bar{x} + 5\bar{y}$

   b) $\bar{x} - 3,3\bar{y}$

4. $\begin{cases} \bar{x} = 6\bar{b} - \bar{a} \\ \bar{y} = 3\bar{b} - \bar{a} \end{cases}$

5. Matriisin G kertaluokka on 4×4 ja matriisin F kertaluokka on 1×2. Matriisissa G on 16 alkiota ja matriisissa F on 2 alkiota.

6. a) $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 13 \\ 9 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 18 \\ -3 & 0 & 21 \end{bmatrix}$

   d) $\begin{bmatrix} 28 \\ 16 \end{bmatrix}$

7. a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 10 \\ 1 & 4 & 20 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 21 & 15 \\ 26 & -2 \end{bmatrix}$

8. a) Ei.

   b) On.

   c) On.

9. a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

10. a) Diagonaalialkiot ovat 2, 7 ja 0.
    b) Diagonaalialkiot ovat 5, 5 ja 5.
    c) Diagonaalialkiot ovat 2 ja 7.
    d) Diagonaalialkio on 4.
    e) Ei ole diagonaalialkioita.

11. b ja c.

12. a) $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -8 & 3 & -7 \end{bmatrix}$
    b) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 9 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$
    c) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

13. a) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$
    b) $\begin{bmatrix} 8 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$

14. $A(BC) = \begin{bmatrix} 250 & 68 \\ 75 & 55 \end{bmatrix} = (AB)C$

15. Oletuksena on, että $r, s \in \mathbb{R}$ ovat skalaareja ja A ja B ovat $m \times m$-matriiseja.
    a) *Todistus.*

$$\begin{aligned} r(A+B) &\overset{(1)}{=} r([a_{ij}] + [b_{ij}]) \\ &\overset{(2)}{=} r[a_{ij} + b_{ij}] \\ &\overset{(3)}{=} [r(a_{ij} + b_{ij})] \\ &\overset{(4)}{=} [ra_{ij} + rb_{ij}] \\ &\overset{(5)}{=} [ra_{ij}] + [rb_{ij}] \\ &\overset{(6)}{=} r[a_{ij}] + r[b_{ij}] \\ &\overset{(7)}{=} rA + rB. \end{aligned}$$

(1) Kirjoitetaan matriisit alkiomuodossa.

(2) Lasketaan matriisien alkiot yhteen.
(3) Kerrotaan matriisi skalaarilla.
(4) Käytetään reaalilukujen laskusääntöjä summalausekkeen kertomiseen.
(5) Käytetään matriisien summan määritelmään erottamaan matriisit.
(6) Käytetään skalaarilla kertomista käänteisesti.
(7) kirjoitetaan alkiomuodossa olevat matriisit alkuperäisessä muodossaan.

□

b) *Todistus.*

$$\begin{aligned}
(r+s)A &\overset{(1)}{=} (r+s)[a_{ij}] \\
&\overset{(2)}{=} [(r+s)a_{ij}] \\
&\overset{(3)}{=} [ra_{ij} + sa_{ij}] \\
&\overset{(4)}{=} [ra_{ij}] + [sa_{ij}] \\
&\overset{(5)}{=} r[a_{ij}] + s[a_{ij}] \\
&\overset{(6)}{=} rA + sA.
\end{aligned}$$

(1) Kirjoitetaan matriisi alkiomuodossa.
(2) Käytetään skalaarilla kertomista.
(3) Käytetään reaalilukujen laskusääntöjä matriisin alkion kertomiseksi skalaarien summalla.
(4) Erotetaan matriisien yhteenlaskun määritelmän nojalla matriisit erilleen.
(5) Käytetään matriisien skalaarilla kertomista käänteisesti.
(6) Kirjoitetaan alkiomuodossa olevat matriisit alkuperäisessä muodossaan.

□

16. a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 1 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 5 & -2 & 9 \\ 865 & -5 & \\ 10 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & -9 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$

17. Käänteismatriiseja ovat A ja C sekä B ja D.

18. a) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = \dfrac{9}{8} \\ y = 1 \\ z = -\dfrac{15}{8} \end{cases}$

19. On. Leikkauspiste on $(24, 19)$.

20. Tasapainossa $Q_d = Q_s = \frac{17}{3} \approx 5{,}67$ ja $P = \frac{13}{6} \approx 2{,}17$.

21. Tasapainossa $Q_d = Q_s = \frac{3}{5} = 0{,}6$ ja $P = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

22. Tasapainossa
$$\begin{cases} Q_{d1} = Q_{s1} = \dfrac{32}{17} \approx 1{,}88 \\ Q_{d2} = Q_{s2} = \dfrac{40}{17} \approx 2{,}35 \\ P_1 = \dfrac{11}{17} \approx 0{,}65 \\ P_2 = \dfrac{18}{17} \approx 1{,}06. \end{cases}$$

23. Tasapainossa
$$\begin{cases} Q_{d1} = Q_{s1} = 6 \\ Q_{d2} = Q_{s2} = 103 \\ P_1 = 23 \\ P_2 = 26. \end{cases}$$

24. Esimerkiksi täydellisen kilpailun vallitessa yritys pystyy pitämään asiakkaansa menettämättä niitä kilpailijoille ja pystyy estämään liikatarjonnan, kun markkinat ovat tasapainossa.

25. Esimerkiksi ruisleipä ja voi.

26. Tasapainossa
$$\begin{cases} Y = \dfrac{112}{5} = 22{,}4 \\ C = \dfrac{77}{5} = 15{,}4. \end{cases}$$

27. Tasapainossa
$$\begin{cases} Y = \dfrac{592}{5} = 118{,}4 \\ C = \dfrac{152}{5} = 30{,}4. \end{cases}$$

28. Sijoituksen jälkeen muodostunut yhtälö on $Y - 6Y^{\frac{1}{2}} = 0$. Kun merkitään $x = Y^{\frac{1}{2}}$, yhtälöksi saadaan $x^2 + 6x - 55 = 0$. Tasapainossa
$$\begin{cases} Y = 121 \\ C = 91. \end{cases}$$

29. Kokonaistuotosvektori
$$\begin{cases} x \approx 402{,}4 \\ y \approx 324{,}7 \\ z \approx 198{,}3. \end{cases}$$

30. Kokonaistuotosvektori
$$\begin{cases} x \approx 271{,}1 \\ y \approx 315{,}9 \\ z \approx 200{,}4. \end{cases}$$

31. Kokonaistuotosvektori
$$\begin{cases} x \approx 74 \\ y \approx 98. \end{cases}$$

32. Kokonaistuotosvektori
$$\begin{cases} x \approx 300{,}8 \\ y \approx 308{,}8 \\ z \approx 433{,}4. \end{cases}$$

Lähteet

[1] Anton, H., Rorres, C. *Elementary Linear Algebra. Applications Version* John Wiley & Sons, 2005.

[2] Bransford, J. D., Brown, A. L., Cocking, R. R. *Miten opimme: Aivot, mieli, kokemus ja koulu*. WS Bookwell Oy, 2004.

[3] Chiang, A. C., Wainwright K. *Fundamental Methods of Mathematical Economics* McGraw-Hill, 2005.

[4] Haukkanen, P. *Lineaarialgebra 1A* Tampereen yliopisto, Informaatiotieteiden yksikkö. [Viitattu 30.5.2016]

[5] Hoviaro, T. *Johdatus lineaarialgebraan*. https://drive.google.com/file/d/0B-gY8KVGrpiWclFpYWNuY3dCWXc/edit?pref=2&pli=1, 2012 [Viitattu 30.5.2016].

[6] Keynes, J. M. *The General Theory of Employment, Interest, and Money* CreateSpace Independent Publishing Platform, 1936.

[7] Lay, D. C. *Linear Algebra and Its Applications*. Boston: Pearson, 2012.

[8] Parviainen, S. *Matematiikka B2 -opintomoniste*. Lappeenrannan teknillinen yliopisto, 2014.

[9] Pohjola, M. *Taloustieteen oppikirja*. WSOYPro, 2010.

[10] Seppänen, R., Kervinen, M., Parkkila I., Karkela L., Meriläinen P. *MAOL-taulukot*. Otava, 2006.

[11] Strang, G. *Linear Algebra and Its Applications*. Thomson Learning Inc. 2006.

[12] Uusikylä, K., Atjonen, P. *Didaktiikan perusteet: 3*. WSOY 2005